数理解析研究所講究録
499巻 1983年 64-77

圧縮性 Navier-Stokes 方程式 について

京大工　松村 昭孝 (Akitaka Matsumura)

奈良女大理 川島秀一氏及び 京大理 西田孝明氏と共に数年来 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の考察を行って来たが、その背景と周辺を紹介する。

単位質量をもつ一種類の粒子集団からなる希薄気体の運動は所謂次の Boltzmann 方程式で記述される。(簡単のため外力は無しとする)

$$\underline{B.\ eq.}\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon} Q[F,F],$$

ここに t：時刻，$x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$：位置，$v=(v_1,v_2,v_3)\in R^3$：速度，$F(t,x,v)$ は時刻 t における粒子の質量分布関数，右辺の $Q[F,F]$ は F について 2 次の衝突積分，ε は平均自由行程に相当するパラメータである。F から自然に定義される流体力学量を以下のように定める。

(1) 質量密度 $\rho(t,x) \equiv \int F(t,x,v)\,dv$,

(2) 流速ベクトル $u^i(t,x) \equiv \frac{1}{\rho}\int v^i F(t,x,v)\,dv \quad (1 \leq i \leq 3)$,

(3) 圧力テンソル $P^{ij} \equiv \int (u^i - v^i)(u^j - v^j) F\,dv \quad (1 \leq i, j \leq 3)$,

(4) 圧力 $p \equiv \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} P^{jj}$,

(5) 熱流ベクトル $q^i \equiv \frac{1}{2}\int (v^i - u^i)|u-v|^2 F\,dv \quad (1 \leq i \leq 3)$,

(6) 内部エネルギー $e \equiv \frac{1}{\rho}\int \frac{1}{2}|u-v|^2 F\,dv$.

いま内部エネルギーを決る自由度が3方向の平行移動だけであるとすると統計力学により R を気体定数として、θ を絶対温度として 状態方程式

(7) $e = \frac{3}{2}R\theta$ (polytropic)

を得る。又このとき (4),(6),(7) より容易に もう一つの状態方程式

(8) $p = R\rho\theta$ (ideal)

を得る。流体力学量に対する方程式を求めるため B.eq. にそれぞれ 1, v^i, $\frac{1}{2}|v|^2$ を掛け v で積分することにより次の方程式系を得る。

$$
(9)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho u^j) = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho u^i u^j + P^{ij}) = 0, \qquad 1 \le i \le 3 \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\rho\big(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\big)\Big) + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho u^j\big(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\big) + \sum_{k=1}^{3} P^{jk} u^k + q^j\Big) \\
\qquad\qquad = 0 .
\end{cases}
$$

基本的な流体力学量 (ρ, u, θ) を考えたとき，状態方程式(7), (8)を考慮しても(9)は閉じた方程式系となっていない。このため歴史的に Chapman-Enskog 展開や Hilbert 展開なるものが考えられている。前者について述べると，平均自由行程 ε が 0 に近ずくとき気体運動は限りなく連続体の運動に近ずくであろうとの発想から F を ε で形式的に展開し各項は流体力学量 (ρ, u, θ) とその空間方向の導関数等で表現されるとするのである，すなわち

$$
(10)\quad F(t,x,v) \simeq F^{(0)}\Big(\big\{\big(\tfrac{\partial}{\partial x}\big)^{\alpha}(\rho,u,\theta)(t,x)\big\}_{\alpha\in N^n}, v\Big) + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \cdots\cdots ,
$$

展開(10)を B.eq. に代入し ε の各係数を比較すると

$$
(11)\quad \begin{cases} 0 = Q[F^{(0)}, F^{(0)}], \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} v^j \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) F^{(0)} = 2Q[F^{(1)}, F^{(0)}], \\ \vdots \end{cases}
$$

Q の適当な条件下に（Chapman & Cowling [3], Grad [4～6] 参照） $F^{(i)}$ $(i \geq 0)$ は決り，特に $F^{(0)}$ は

$$
(12)\quad F^{(0)} = \rho\,(2\pi R\theta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|u-v|^2}{2R\theta}}, \quad \text{(locally Maxwellian)}
$$

で与えられる。いま 0 次近似として $F = F^{(0)}$ として (9) に代入すると次の圧縮性 Euler 方程式を得る。

$$
\text{E.eq.}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho u^j) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho u^i u^j + p\delta^{ij}) = 0, \qquad (1 \leq i \leq 3) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\right)\right) + \displaystyle\sum_{j=1} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\left(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\right)u^j + p u^j\right) = 0, \\ p = R\rho\theta, \qquad e = \dfrac{3}{2}R\theta. \end{cases}
$$

又 一次近似までとり $F = F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)}$ とすると次の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を得る。

N-S.eq.
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho u^j) = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u^i u^j + p\delta^{ij}\right) \\
\qquad\qquad = \varepsilon \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u^j}{\partial x_i}\right) - \dfrac{2}{3}\mu\,\delta^{ij}\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\dfrac{\partial u^k}{\partial x_k}\right), \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\right)\right) + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u^j\left(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\right) + p u^j\right) \\
\qquad\qquad = \varepsilon \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(k\dfrac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\left(u^k\left(\dfrac{\partial u^k}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u^j}{\partial x_k}\right) - \dfrac{2}{3}u^j\dfrac{\partial u^k}{\partial x_k}\right)\right), \\[2ex]
p = R\rho\theta, \quad e = \dfrac{3}{2}R\theta,
\end{cases}
$$

ここに $\varepsilon\mu$, εk はそれぞれ粘性係数、熱伝導係数である。これまでの過程を考えると自然に多くの数学的問題が派生する。まず方程式 B.eq., E.eq., N-S.eq. 自体に対する数学的な基本問題である初期値問題，初期値境界値問題，定常解とその安定性の問題等が解けるのかどうか，又 B.eq. から N-S.eq. に至る推論の裏付けとなる各方程式の解の間の関係の問題すなわち，$\varepsilon \to 0$ のとき N-S.eq. の解は E.eq. の解に近ずくのか，

さらに $\varepsilon \to 0$ のとき N-S.eq. や E.eq. はもとの B.eq. をどの程度近似しているのか,…等々の問題がある。以上の問題に加えそれぞれに対しての一次元二次元の場合,外力のある場合,電磁場との相互作用がある場合など非常に多くの問題に満ちている。

B.eq. について:

多くの仕事があるがその中から,時間的局所解の存在と一意性については Grad [4～6], Glikson [31,32], 浅野 [2], 初期値がある意味で小さい時の時間的大域解の存在については 鵜飼 [39,40], 西田-今井 [30], 静田-浅野 [36], 鵜飼-浅野 [41,42] 等の仕事がある。外力がある場合や大きいdataに対する場合など多くの未解決の問題がある。

E.eq. について:

小さな初期値に対してでさえ一般には shock が起ることが予想されるので滑らかな時間的大域解は期待できない。時間的局所解の存在と一意性については 加藤 [9], 上見 [1] があるがその後の時刻において本当に shock が起るのか,起ったときの弱解の取り扱いなどは分っていない。一次元のモデルに関しては多くの仕事がなされており shock が起ることに関しては Lax [19], John [7], Liu [21], 時間的大域的な弱解 については Glimm [17], 西田 [27], Liu [20] … 等がある。

N-S. eq. について:

比較的最近の話題であり小さな初期値についてさえも十分に解けているとは言えない。時間的局所解の存在と一意性は 板谷 [14~15], Nash [29], 谷 [37 38], Vol'pert-Hudjaev [44], 初期値が小さいときの時間的大域解の存在については 西田-松村 [22~24], 松村 [25], 松村-川島-岡田 [26], の仕事があるがいまだに外部問題は十分に考察されていない。一次元のモデルに関しては多くの大域解に関する仕事があり Kanel' [8], Kazhikhov-Shelukhin [18], 板谷 [16], 川島-西田 [10], 岡田-川島 [34] 又電磁気と相互作用がある場合については 岡田-川島 [35], 川島 [33] をあげることが出来る。

E. eq と N-S. eq. について

E. eq. の解が存在する限りにおいて $\varepsilon \to 0$ のとき N-S. eq の解は E. eq に近ずくことが 川島-西田 [11] で示された。

E. eq. と B. eq. について

初期値が解析的である時、時間局所的に B. eq. の解は $\varepsilon \to 0$ のときに locally Maxwellian (12) すなわち E. eq. の解に近ずくことが 西田 [28]，別証明が 鵜飼－浅野 [43]で示されている。 解析的でない初期値に対しては分っていない。

N-S. eq. と B. eq. について

$\varepsilon \to 0$ のときの挙動は分っていないが 川島－松村－－西田 [12] は、B. eq. の初期値と N-S. eq. の初期値が (1), (2), (6) を満し B. eq. の初期値が十分に absolute Maxwellian $e^{-\frac{1}{2}|v|^2}$ に近いならば 両者の差は $t \to +\infty$ のときに $t^{-\frac{5}{4}}$ の割合で 0 に近ずくことを示した。

参考文献

[1] Agemi, R.: The initial boundary value problem for inviscid barotropic fluid motion. Hokkaido Mathematical Journal Vol. X, No1. 156～182 (1981)

[2] Asano, K.: Local solutions to the initial boundary value problem for the Boltzmann equation with an external force. (to appear)

[3] Chapman, S. & Cowling, T. : The mathematical theory of non-uniform gases, 3rd ed. London, Cambridge University Press 1970.

[4] Grad, H. : Principles of the kinetic theory of gases. Handbuch Phys. 12, 205-294 (1958).

[5] ——— : Asymptotic theory of the Boltzmann equation II. Rarefied Gas Dynamics I, 25~59 (1963)

[6] ——— : Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equation. Proc. Symp. Appl. Math., Amer. Math. Soc. 17, 154-183 (1965).

[7] John, F. : Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation, Comm. Pure Appl. Math., 27, 377~405 (1974)

[8] Kanel', Ya. I. : On a model system of equations for one-dimensional gas motion, Diff. Eq. (Russian) 4, 721-734 (1968),

[9] Kato, T. : The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rat. Mech. Anal., 58, 3, 181~205 (1975).

[10] Kawashima, S. & Nishida, T. : Global solutions to the initial value problem for the equations of one-dimensional

motion of viscous polytropic gases, J. Math. Kyoto Univ., 21, 825~837 (1981).

[11] —————— : The initial value problems for the equations of viscous compressible and perfect compressible fluids, RIMS, Kokyuroku 428, Kyoto Univ., "Nonlinear Functional Analysis" June 1981, 34-59.

[12] Kawashima, S., Matsumura, A. & Nishida, T. : On the fluid dynamical approximation to the Boltzmann equation at the level of the Navier-Stokes equation. Comm. Math. Phys. 70, 97~124 (1979).

[13] Kawashima, S. : Smooth Global Solutions for two-dimensional equations of Electro-Magneto-Fluid Dynamics. (to appear).

[14] Itaya, N : On the Cauchy problem for the system of fundamental equations describing the movement of compressible viscous fluids, Kōdai Math. Sem. Rep., 23, 60-120 (1971).

[15] ——— : On the initial value problem of the motion of compressible viscous fluids, especially on the problem of uniqueness, J. Math. Kyoto Univ., 16, 413~427 (1976).

[16] ——— : A survey on two model equations for compressible viscous fluid, J. Math. Kyoto Univ. 19, 293-300 (1979).

[17] Glimm, J : Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math., 18, 697-715 (1965.

[18] Kazhikhov, A.V. & Shelukhin, V. V. : Unique global solution with respect to time of the initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas, J. Appl. Math. Mech., 41, 273-282 (1977).

[19] Lax, P. D. : Developement of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Math. Phys., 5, 611-613 (1964).

[20] Liu, T. P. : Solutions in the large for the equations of nonisentropic gas dynamics, Indiana Univ. Math. J., 26, 147-177 (1977)

[21] ―― : Development of singularities in the nonlinear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations, J. Diff. Eq. 33, 92-111 (1979)

[22] Matsumura, A. & Nishida, T : The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Proc. Japan Acad., 55, 337-342 (1979)

[23] ―――― : Inital boundary value problems for the equations ~~for the~~ of motion of general fluids, Proc. 5-th Int. Symp. on Computing Methods in Applied Sci. and Eng. V.

389 - 406 (1982)

[24] ——— : Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Univ. of Wisconsin-Madison, MRC Technical Summary Rep. # 2430.

[25] Matsumura, A : An energy method for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Univ. of Wisconsin-Madison, MRC Technical Summary Rep. #2194 (1981).

[26] Matsumura, A., Kawashima, S. & Okada, M. : 圧縮性粘性流体の方程式に対するエネルギー法, 数理研講究録 462, 104 - 122 (1982).

[27] Nishida, T. : Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, Proc. Japan Acad., 44, 642-646 (1968).

[28] ——— : Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation. Comm. Math. Phys. 61, 119-148 (1978).

[29] Nash, J. : Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général, Bull. Soc. Math. France, 90, 487-497 (1962)

[30] Nishida, T. & Imai, K. : Global solutions to the initial value problem for the non linear Boltzmann equation. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12, 229 − 239 (1976).

[31] Glikson, A. : On the existence of general solutions of the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation with a cut off. Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 35 −46 (1972).

[32] ―― : On solutions of the nonlinear Boltzmann equation with a cut off in an unbounded domain. Arch. Rat. Mech. Anal. 47, 389 − 394 (1972).

[33] Kawashima, S. : Smooth global solutions for two-dimensional equations of electro-Magneto-Fluid Dynamics, (to appear).

[34] Okada, M. & Kawashima, S : On the equations of one-dimensional motion of compressible viscous fluids, J. Math. Kyoto Univ. Vol. 23, No. 1, 55 − 71 (1983).

[35] ―― : Smooth Global solutions for the one-dimensional equations in Magnetohydrodynamics, (to appear).

[36] Shizuta, Y. & Asano, K. : Global solutions of the Boltzmann equation in a bounded convex domain. Proc. Japan Acad. Ser. A. 53, 3 −5 (1977).

[37] A, Tani : On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion, Publ. RIMS. Kyoto Univ.,

13, 193-253 (1977).

[38] —— : On the free boundary value problem for compressible viscous fluid motion, J. Math. Kyoto Univ., 21, 839-859 (1981).

[39] Ukai, S : On the existence of global solutions of mixed problem for nonlinear Boltzmann equation. Proc. Japan Acad. Ser. A, 50, 179-184 (1974)

[40] —— : Les solutions globales de l'équation non linéaire de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans demi-espace. C. R., Acad. Sci. (Paris) A, 282, 317-320 (1976).

[41] Ukai, S. and Asano, K, : On the Cauchy problem of the Boltzmann equation with a soft potential. (to appear in Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.).

[42] —— : Stationary solutions of the Boltzmann equation for a gas flow past an obstacle I, II, (to appear).

[43] —— : The Euler limit and initial layer of the nonliear Boltzmann equation, (to appear).

[44]. Vol'pert, A. I. and Hudjaev, S. I. : On the Cauchy problem for composite systems of nonlinear differential equations, Math. USSR. Sbornik, 16, 517-544 (1972).